

14. Подход Бокса-Дженкинса построения модели типа $ARIMA(p,d,q)$ по реализации временного ряда.

Бокс и Дженкинс предложили следующий подход, состоящий из нескольких этапов, к выбору модели типа $ARIMA$ по наблюдаемой реализации временного ряда.

Для начала вспомним модель типа $ARIMA$:

$ARIMA$ – процесс авторегрессии интегрированного скользящего среднего. При этом p – параметр AR -части, d – степень интеграции и q – параметр MA -части.

В операторном виде процесс $ARIMA(p, d, q)$ записывается как: $\alpha_p(L)\Delta^d x_t = \beta_q(L)\varepsilon_t$.

Или по-другому $\underbrace{\alpha_p(L)(1-L)^d}_{p+d} x_t = \beta_q(L)\varepsilon_t$.

А этапы следующие:

Этап I. Идентификация модели

1. Установить порядок интеграции d , то есть добиться стационарности ряда, взяв достаточное количество последовательных разностей. Другими словами, "остационарить" ряд. Используются все описанные ранее средства визуальный анализ коррелограммы визуальный анализ автокорреляционной и частной автокорреляционной функций, тест на единичный корень. $d \leq 2$ – обычно.
2. После этого мы получаем временной ряд y_t , которому нужно подобрать уже $ARMA(p, q)$. Исходя из поведения автокорреляционной и частной автокорреляционной функций, установить параметры p и q . Рекомендуются, чтобы $\gamma + \beta \leq 3$.

Этап II. Оценивание модели

Оценивание коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$ при условии, что мы уже знаем p и q .

Этап III. Диагностика модели

Стандартная для эконометрического подхода процедура. По остаткам осуществляется тестирование или диагностика построенной модели.

Этап IV. Использование модели

Использование модели, в основном, для прогнозирования будущих значений временного ряда.

Бокс и Дженкинс применили этот подход ко многим временным рядам, которые были известны в то время, как к финансовым, так и к макроэкономическим.

Бокс и Дженкинс смогли построить модели типа $ARIMA$ для всех

исследуемых рядов и установили, в частности, что практически все экономические процессы описываются моделями с относительно небольшими величинами параметров p и q , а параметр d обычно не превышает 2. К тому же оказалось, что точность прогнозирования по моделям *ARIMA* оказалась выше, чем давали в то время экономические модели.

Если исследуемый ряд *нестационарный*, то его автокорреляционная функция не будет убывать.

Если ряд *стационарен*, то, начиная с какого-то номера, теоретические автокорреляции будут убывать. Поэтому можно рассчитать их оценки – выборочные автокорреляции, и посмотреть, убывают они или нет. Если ряд окажется стационарным, перейти к определению параметров p и q . Если нет, то надо построить ряд первых разностей и проверить на стационарность его.

Рассмотрим, **например**, процесс $x_t = \alpha x_{t-1} + \epsilon_t$, $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.

При $\alpha > 1$ взятие первой разности не поможет сделать ряд стационарным. Это нестационарный ряд взрывного типа, оценки его "автокорреляционной" функции растут с увеличением сдвига во времени.

Если же $\alpha = 1$, то ряд представляет собой случайное блуждание и после взятия первой разности он станет стационарным.

Переходим к оцениванию по выборке статистических характеристик исследуемого процесса в предположении его эргодичности. В качестве оценки математического ожидания применяется статистика $\bar{x} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t$, то есть обычное среднее по выборке.

В качестве оценки дисперсии процесса обычно принимается следующая величина

$$S^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (x_t - \bar{x})^2$$

Обратите внимание делитель не $T - 1$, а как привычно для обработки независимых наблюдений, а T .

Для оценки коэффициента теоретической автокорреляции используем $\hat{\rho}_k = \frac{1}{TS^2} \sum_{t=k+1}^T (x_t - \bar{x})(x_{t-k} - \bar{x})$.

Это означает, что для расчета выборочных ковариаций используется одинаковый делитель – T , что, в случае независимых наблюдений, дает смещенные оценки соответствующих теоретических ковариаций. Если бы мы требовали несмещенности оценок, то у нас бы были разные делители при различных k . Кроме того, при увеличении k уменьшается объем выборки, пригодный для расчета оценки соответствующего коэффициента корреляции. На практике, по рекомендации, идущей еще от Бокса и Дженкинса, не рассчитываются оценки $\hat{\rho}_k$ для $k > \frac{T}{4}$.